

Modelltheorie

Blatt 5

Abgabe: 28.11.2022, 17 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte).

Betrachte erneut die Abbildung $\text{restr} : S_n^{\mathcal{M}}(B) \rightarrow S_n^{\mathcal{M}}(A)$ von Aufgabe 3 auf Blatt 4.

- a) Zeige, dass restr surjektiv ist.
- b) Ist restr immer injektiv?

Hinweis: $\exists^\infty x$

Aufgabe 2 (9 Punkte).

Die Sprache $\mathcal{L} = \{P_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ besteht genau aus einem einstelligen Prädikat P_s für jede endliche Folge s aus 0en und 1en. Betrachte die Klasse \mathcal{K} der \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} derart, dass $P_\emptyset^{\mathcal{A}}$ das Grunduniversum A ist. Weiter ist für s aus $2^{<\omega}$ die Menge $P_s^{\mathcal{A}}$ die disjunkte Vereinigung der Teilmengen $P_{s\hat{\ }0}^{\mathcal{A}}$ und $P_{s\hat{\ }1}^{\mathcal{A}}$, welche beide nicht-leer sind.

- a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse \mathcal{K} an und zeige, dass T konsistent ist.

Hinweis: Es gibt ein passendes überabzählbares Modell, dessen Elemente Funktionen sind.

- b) Zeige, dass T vollständig ist und Quantorenelimination hat.
- c) Beschreibe (informell) alle Typen in $S_1(T)$.
- d) Zeige, dass kein Typ in $S_1(T)$ isoliert ist.
- e) Besitzt T ein Primmodell?

Aufgabe 3 (6 Punkte).

- a) Sei (X, T) ein kompakter unendlicher topologischer Raum. Zeige, dass X mindestens einen nichtisolierten Punkt besitzt.

Betrachte nun die mit Quantorenelimination vollständige Theorie DLO dichter linearer Ordnungen ohne Endpunkte in der Sprache $\mathcal{L} = \{<\}$. Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass jeder Typ in $S_n(\text{DLO})$ isoliert ist. Dazu:

- b) Sei T eine beliebige \mathcal{L} -Theorie und n aus \mathbb{N} derart, dass $S_n(T)$ endlich ist. Zeige, dass jeder Typ p aus $S_n(T)$ isoliert ist.
- c) Zeige, dass $S_n(\text{DLO})$ nur endlich viele Typen für jedes n aus \mathbb{N} besitzt.

Bonusfrage Finde eine (möglichst gute) obere Schranke für die Anzahl an Typen in $S_n(\text{DLO})$.